高等数学

作者：YGM

时间：2023/6/20

版本：2.1

感觉光做题而没有总结和感悟是不行滴，所以特来码字

目录

第一章 函数、极限、连续 **1**

第二章 一元函数微分学及其应用 **2**

第三章 一元函数积分学及其应用 **3**

第四章 空间解析几何 **5**

第五章 多元函数微分学及其应用 **6**

第六章 重积分及其应用 **7**

第七章 微分方程 **8**

7.1 一阶微分方程 8

7.2 可降阶的高阶方程 9

7.3 高阶线性微分方程 9

第八章 无穷级数 **12**

第九章 曲线积分与曲面积分 **13**

第一章 函数、极限、连续

本章内容较为基础，由于精力有限，本章仅选两道题目作为本章内容

题目 1.1

证明：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, 证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

解 1.1

题目 1.2

证明：$\ln(n+1) \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln n$

解 1.2

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 由于 $f(x)$ 是单调递减的函数，所以有

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

不等式左边 $k=1$ 到 $k=n$ 求和，右边由于 $k=1$ 时是被积函数的瑕点，所以从 $k=2$ 开始求和，于是就有

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

合并可有

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} dx$$

即

$$\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln n$$

第二章 一元函数微分学及其应用

内容提要

- 拐点
- 曲率
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理

总结 2.1 (拐点)

曲线凹凸性变化的点，即二阶导为 0 且在该点左右函数值异号的点

总结 2.2 (曲率与曲率半径)

曲率 $k=\dfrac{d\alpha}{ds}$，$\begin{cases}\tan\alpha=y'\Rightarrow\dfrac{d\alpha}{1+y'}=y''\Rightarrow\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{y''}{1+y'^2}\\ \dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}\end{cases}$，故 $k=\left|\dfrac{d\alpha/dx}{ds/dx}\right|=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$，若是参数方程 $\begin{cases}x=u(t)\\ y=v(t)\end{cases}$，根据参数方程的求导法则可以得到 $k=\left|\dfrac{v''u'-v'u''}{(v'^2+u'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$，曲率半径 $R=\dfrac{1}{k}$

题目 2.1 (拉格朗日中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，且 $f(a)=0$，证明 ∃ 一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$

解 2.1

构造 $h(x)=(x-b)^af(x)$，$h'(x)=a(x-b)^{a-1}f(x)+(x-b)^af'(x)$，易知 $h(a)=0,h(b)=0$，故 ∃ 一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$

$$a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^af'(\xi)=0$$

两边约分，即 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$

题目 2.2 (柯西中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $2\eta f'(\xi)=(b+a)f'(\eta)$

解 2.2

设 $g(x)=x^2$，有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}=\dfrac{(b-a)f'(\xi)}{b^2-a^2}$，整理即为结果

第三章 一元函数积分学及其应用

内容提要

- 弧长
- 定积分计算
- 旋转体体积和侧面积
- 柯西积分不等式
- 泰勒不等式

总结 3.1 (弧长)

弧长：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$

面积（极坐标）：$dS=\frac{1}{2}\rho^2d\theta$

总结 3.2 (定积分计算)

非常常用的两种计算技巧

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)+f(a+b-x)dx \tag{3.1}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)+f(-x)dx \tag{3.2}$$

总结 3.3 (旋转体体积和侧面积)

旋转曲线以 $y=f(x)$ 为例

旋转体积（绕 x 轴）：$dV=\pi f^2(x)dx$

旋转体积（绕 y 轴）：$dV=\pi x^2dy$

旋转侧面积（绕 x 轴）：$dS=2\pi f(x)ds$

旋转侧面积（绕 y 轴）：$dS=2\pi g(y)ds$

总结 3.4 (柯西积分不等式)

$$\left(\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

证明：

$$(f(x)t+g(x))^2\ge 0 \tag{3.3}$$

$$f^2(x)t^2+2f(x)g(x)t+g^2(x)\ge 0 \tag{3.4}$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2+\left(\int_a^b 2f(x)g(x)dx\right)t+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0 \tag{3.5}$$

$$b^2-4ac\le 0 \tag{3.6}$$

$$\left(\int_a^b 2f(x)g(x)dx\right)^2-4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\le 0 \tag{3.7}$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \tag{3.8}$$

总结 3.5 (泰勒不等式)

这个不等式主要利用了曲线在某一段的凹凸性构建而成，我们假设 $f(x)$ 在某段（假设包含原点）是凸曲线，那么有

$$f''(x) < 0 \tag{3.9}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)x^2}{2} \tag{3.10}$$

$$f(x) < f(0) + f'(0)x \tag{3.11}$$

第四章 空间解析几何

内容提要

- 空间曲面
- 空间直线的距离

总结 4.1 (空间曲面)

1. 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$
2. 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
3. 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4. 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
5. 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
6. 双曲抛物面（马鞍面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

总结 4.2 (空间直线的距离)

求直线 A 与直线 B 之间的距离，应先求过直线 B 且与直线 A 平行的平面，转化为线面距离

第五章 多元函数微分学及其应用

1. 切向量与法平面
2. 法向量与切平面
3. 多元函数极值点求法（$AC - B^2$）
4. 拉格朗日乘数法（解决条件极值）
5. 全微分是否存在：$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\left(\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}\right)$

第六章 重积分及其应用

1. 重积分的计算经常利用积分区域的对称性
2. 面面所围的体积，适当的情况下可以转化到二重积分上去
3. 质心坐标：$\overline{x}=\dfrac{\iint xf(x,y)dxdy}{\iint f(x,y)dxdy}, \overline{y}=\dfrac{\iint yf(x,y)dxdy}{\iint f(x,y)dxdy}$

第七章 微分方程

内容提要

- 一阶微分方程
- 可降阶的高阶方程
- 高阶线性微分方程

7.1 一阶微分方程

7.1.1 可分离变量的方程

能表示为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程，称为**可分离变量的方程**。
求解的方法是两端积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

7.1.2 齐次方程

能化为 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为**齐次微分方程**。
求解齐次微分方程的一般方法为：令 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $y' = u + xu'$，从而将原方程化为 $xu' = \varphi(u) - u$，此方程为可分离变量的方程

7.1.3 线性方程

形如 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的方程称为**一阶线性微分方程**。
求解一阶线性微分方程的一般方法是常数变易法，但推导计算量较大，通常直接利用通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

7.1.4 伯努利方程

形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n$，令 $u = y^{1-n}$，可以化为 $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$，即将伯努利方程转化为一阶微分方程.

7.1.5 全微分方程

如果方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的左端是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分：

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

则称该方程为全微分方程。此方程的通解为 $u(x,y) = C$，求 u(x,y) 有三种方法（线积分，偏积分，凑微分）

总结 7.1 (全微分方程)

求 u(x,y):

$$\left[xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y\right]dx + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy = 0$$

1. 线积分（推荐）
也叫折线法，利用第二类曲线积分从 u(0,0) 积分到 u(x,y)，由于积分结果与路径无关，所以选择一条最简

单的积分路径，即 $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，第一段 $y=0$ 是定值所以 $dy=0$，带入 y 值第一段积分为

$$\int_0^x 0dx=0$$

第二段 $x=x$ 是定值所以 $dx=0$，带入，第二段积分为

$$\int_0^y(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)dy=\frac{x^2y^2}{2}+2xy-2y\sin x+y\cos x$$

所以 $u(x,y)=$ 第一段积分 + 第二段积分 $=\dfrac{x^2y^2}{2}+2xy-2y\sin x+y\cos x=C$

2. 偏积分

$\int xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2ydx=\frac{1}{2}x^2y^2-(2\sin x-\cos x)y+2yx+o(y)$

$x^2y-(2\sin x-\cos x)+2x+o'(y)=-2\sin x+\cos x+2x+x^2y$

即 $o'(y)=0,o(y)=C$

3. 凑微分

$$\left[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y\right]dx+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)dy \tag{7.1}$$

$$=d(\frac{x^2y^2}{2})+d(2xy)-d(2y\sin x)+d(y\cos x) \tag{7.2}$$

$$=d(\frac{x^2y^2}{2}+2xy-2y\sin x+y\cos x)=0 \tag{7.3}$$

7.2 可降阶的高阶方程

7.2.1 $y^{\{n\}}=f(x)$ 型的微分方程

7.2.2 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

只需令 $y'=py''=p'$，可将原方程化为一阶微分方程

7.2.3 $y''=f(y,y')$ 型的方程

只需令 $y'=p,y''=p\dfrac{dp}{dy}$，可将原方程化为一阶微分方程

7.3 高阶线性微分方程

7.3.1 线性微分方程解的结构

这里只讨论二阶线性微分方程，其结论可以推广到更高阶的方程，二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

这里的 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数，当方程右端的 $f(x)\equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次微分方程，否则称为二阶线性非齐次方程

$$\text{齐次方程}\qquad y''+p(x)y'+q(x)=0 \tag{1}$$

$$\text{非齐次方程}\qquad y''+p(x)y'+q(x)=f(x) \tag{2}$$

定理 7.1

如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

就是方程（1）的通解

【注】方程（1）的两个解线性无关的充分必要条件是它们之比不为常数

♣

定理 7.2

如果 $y*$ 是非齐次方程（2）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y*(x)$$

是非齐次微分方程（2）的特解

♣

定理 7.3

如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 是非齐次方程（2）的两个特解，则 $y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$ 是齐次微分方程（1）的解

♣

定理 7.4

如果 $y_1^*(x), y_2^*$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的一个特解

♣

7.3.2 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3}$$

其特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$，设 r_1, r_2 为该方程的两个根

1）若 $r_1 \neq r_2$ 为两个不相等的实特征根，则方程（3）的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2）若 $r_1 = r_2$ 为二重实特征根，则方程（3）的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

3）若 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 为一对共轭复根，则方程（3）的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

7.3.3 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{4}$$

1) 若 $f(x) = P_m(x) e^{\lambda x}$，其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，则方程（4）的特解可设为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，k 是特征方程含根 λ 的重复次数，即当 λ 不上方程（3）的特征根时，$k = 0$；当 λ 是方程（3）的单特征根时，$k = 1$；当 λ 是方程（3）的重特征根时，$k = 2$

2) 若 $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$，其中 $P_l(x),P_n(x)$ 分别是 x 的 l 次，n 次多项式，则方程（4）的特解可设为

$$y^*=x^k e^{\alpha x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 为两个 m 次多项式，$m=max\{l,n\}$
当 $\alpha+i\beta$ 不为方程（3）的特征根时，取 $k=0$;
当 $\alpha-i\beta$ 为方程（3）的单特征根时，取 $k=1$

7.3.4 欧拉方程

形如 $x^2y+pxy'+qy=f(x)$，令 $x=e^t$，使用微分算子的表达形式为 $D^2Y+(p-1)DY+qY=f(e^t)$，即将欧拉方程化为常系数微分方程

第八章 无穷级数

内容提要

- 级数判定
- 函数项级数
- 傅里叶级数

总结 8.1 (级数判定)

正向级数：比较审敛法，比值审敛法，极限审敛法

交错级数：莱布尼茨判定法

总结 8.2 (函数项级数)

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad (|x| < 1)$，表达式很好看，也是个人认为最重要的一个展开

总结 8.3 (傅里叶级数)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1} n a_i \cos\frac{n\pi x}{l} + b_i \sin\frac{n\pi x}{l}，\text{其中} \begin{cases} a_i = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ b_i = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{cases}$$

第九章 曲线积分与曲面积分

1. 一二类曲线积分的转化：$\int_L f(x,y)ds = \int_L P\cos\alpha + Q\sin\beta ds$
2. 格林公式使用时注意曲线所围内部是否有奇点
3. 第一类曲面积分 $\iint f(x,y,z)dS = \iint f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$
4. 第二类曲面积分可利用高斯公式转化为三重积分