大学生数学竞赛教程 by 蒲和平-习题解析

姚光明

2023 年 1 月 20 日

1 第一章 1.2

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})$

解析

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1$

(3) 当 $x=-1$ 时，原式 $=0$

当 $|x|<1$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2n})}{1-x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{4n}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$

当 $|x|>1$ 时，原式 $=\infty$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解析

(1)

当 $x\to+\infty$ 时，易得原式 $=1$

当 $x\to-\infty$ 时，易得原式 $=\dfrac{\pi}{2}$

(2)

当 $x\to 0^+$ 时，易得原式 $=1$

同理 $x\to 0^-$ 时，易得原式 $=1$，综上，原式 $=1$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[e^{2+\frac{1}{n}}+e^{2-\frac{1}{n}}-2e^2]$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$

解析

(1)

原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{2\ln\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(2)

令 $t=\dfrac{1}{n}$，原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t+2}+e^{2-t}-2e^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{2+t}+e^{2-t}}{2}=e^2$

(3)

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}3^x\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{3}\sin x\right)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$，求 a,b，使 $x\to 0$，$f(x)\sim ax^b$

解析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^4}=C$$

即 $f(x)=2Cx^4+o(x^4)$，故 $a=2C,b=4$

5. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x\ln[(1+\sin+\cos^2 x)/(1-\sin x)]$

解析

(1)

易得原式 $=0$

(2)

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x\ln 2=0$

6. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$;

(3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

解析

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} < \text{原式} < \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}$$

根据夹逼准则，原式 $=\pi$

(2)

由 $\dfrac{n+k}{n^2+n} \le \dfrac{n+k}{n^2+k} \le \dfrac{n+k}{n^2+1}$ 和夹逼准则

原式 $=\dfrac{3}{2}$

(3)

易知 $1 \le a_n \le n$，由夹逼准则可知

原式 $=1$

7. 设 $F(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$; (3) $\lim\limits_{x\to0} F(x)$

解析

(1)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}{x}} = max\{a_1a_2\cdots a_n\}$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = min\{a_1a_2\cdots a_n\}$$

(3)

由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0} F(x) = a_1a_2\cdots a_n$

8. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限

解析

易知 $0 < x_n < \frac{3}{2}\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1} > 1$，所以 $\{x_n\}$ 收敛

设极限为 A，对递推式两边取极限有 $A = \sqrt{A(3-A)}$，解得 $A = \frac{3}{2}$

9. $0 < a < 1, x_1 = \frac{a}{2}, x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}(n = 2, \cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限

解析

单调性：

由 $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} + x_{n-2})$，可以看出 $x_n - x_{n-1}$ 的正负取决于 $x_{n-1} - x_{n-2}$，

依次递推下去可以知道该正负取决于 $x_2 - x_1 > 0$，所以数列单调递增

有界性：

若 $x_{n-1} < a$, 那么 $x_n < a$，而 $x_1 < a$，由数学归纳法可有 $x_n < a$

综上，对递推式取极限可有 $A = 1 - \sqrt{1-a}$

10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{\tan x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

解析

由 $\sin x_n - x_n < 0$ 可知数列单调性，而数列有界性显而易见，可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，所以原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{\sin x - \tan x}{\tan x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}} = e^{-\dfrac{1}{2}}$

11. 设 $x_1 = \frac{1}{1}, x_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, x_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty x_n}$

解析

根据中值定理，数列奇数项递减，偶数项递减，有界性易见，可根据递推公式求得极限为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

12. 设 $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n), n = 0, 1, 2, \cdots$, 其中 $A > 0$. 确定初始值 x_0，使得 $\{x_n\}$ 收敛

解析

$x_n = -A\left(x_{n-1} - \frac{1}{A}\right)^2 + \frac{1}{A} = -A\left(Ax_0 - 1\right)^{2(n-1)} + \frac{1}{A}$，若要 x_n 收敛，那么 $|Ax_0 - 1| <= 1$，即 $0 \le x_0 \le \frac{2}{A}$

13. 设曲线 $y = f(x)$ 在原点与 $y = \sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$

解析

原式 $= n^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n}) - f(0)}{\frac{2}{n}}\frac{2}{n}} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{f'(0)} = \sqrt{2}$

14. 设函数 $f(x) > 0$，在 $x = a$ 处可导，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]$

解析

取对数,令 $t = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t) - \ln f(a-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\ln f(a+t) - \ln f(a)}{t} + \frac{\ln f(a) - \ln f(a-t)}{t}\right] = 2\frac{f'(a)}{f(a)}$

15. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x}$

解析

(1)

$$原式 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{1}{(1+\xi^2)\arctan\xi}\ \xi \in (x, x+1)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

(2)

$$原式 = \lim_{x\to 0^+} \tan\xi\ \xi \in (\sin x, \tan x)$$

$$= 0$$

16. 求 $\lim_{x\to\infty} x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x}) - \sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

解析

$$原式 = \lim_{x\to\infty} x\frac{2}{x}\cos\ln(1+\xi)\frac{1}{1+\xi}\ \xi \in \left(\frac{1}{x}, \frac{3}{x}\right)$$

$$= 2$$

17. 弦 PQ 所对的圆心角为 θ，设 $A(\theta)$ 是弦 PQ 与弧 PQ 之间的面积，$B(\theta)$ 是切线长 $PQ\ QR$ 与弧之间的面积，求极限 $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$

解析

$$A(\theta) = \frac{\theta}{2}r^2 - r^2\sin\theta$$

$$B(\theta) = r^2\tan\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}r^2$$

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = 2$$

18. 求极限

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$

解析

(1)

取对数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(2)

令 $t=\sin x$，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 1}\frac{1-t^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-t^{\alpha}}\sqrt{1-t^{\beta}}}\\
&=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t^{\alpha})(1+t^{\beta})+(1+t^{\alpha})(1-t^{\beta})}{2\sqrt{1-t^{\alpha}}\sqrt{1-t^{\beta}}}\\
&=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1-t^{\alpha}}{1-t^{\beta}}}(1+t^{\beta})+\sqrt{\frac{1-t^{\beta}}{1-t^{\alpha}}}(1+t^{\alpha})\right]\\
&=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}
\end{aligned}
$$

19. 试确定常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求出它的值

解析

对极限进行洛必达可得到，$\begin{cases}1+a+b=0\\ a+4b=0\end{cases}$

解得 $a=-\dfrac{4}{3},b=\dfrac{1}{3}$

20. 确定 a,b 的值，使当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷下

解析

对极限进行洛必达，有 $\begin{cases}a-b=1\\ 1+2b(a-b)=0\end{cases}$

解得 $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$

21. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0.$

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，求 $f''(0)$

解析

(1)

由已知条件可有 $xf(x)=o(x^3)-\sin 6x$，

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{6x-\sin 6x+o(x^3)}{x^3}=36$

(2)

由洛必达可知，$f''(0)=72$

22. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 是关于 x 的几阶无穷小？

解析

$\dfrac{26}{15}$

23. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\sin x}-x-\cos x}{\arcsin^2 x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\dfrac{x^4}{12}}{\sin^6 x}\right)$

解析

均用泰勒展开即可

(1)

1

(2)

$\dfrac{7}{360}$

24. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq 0$ 求常数 A,B,C,D

解析

对 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 进行泰勒展开即可

$A=e,B=-\dfrac{e}{2},C=\dfrac{11e}{24},D=-\dfrac{7e}{16}$

25. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\dfrac{k}{n})\sin(\dfrac{k\pi}{n^2})$

解析

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{k\pi}{n^2}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

$=\dfrac{5\pi}{6}$

26. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\ln(1+\dfrac{2}{n})$

解析

(1)

原式 $= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})$

(2)

由夹逼准则

原式 $= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

(3)

$2e^{-1}$

27. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}dx$

解析

对任意的 ξ 都有 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\xi}\frac{\sin^n x}{1+x}dx + \lim_{n\to\infty}\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}dx = 0$

28. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$，证明数列 x_n 收敛

解析

通过证明级数 $\{\sum x_n - x_{n-1}\}$ 收敛，证明 $\{x_n\}$ 收敛

29. 求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

解析

(1)

原式 $= e^{k\ln n - n\ln a} = 0$

(2)

原式 $= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} = 1$

30. 序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 由下列条件定义：$x_0 = a, x_1 = b, x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} + (2n-1)x_n}{2n}, n \geq 1$，这里 a 与 b 是已知数，试用 a 与 b 表示 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$

解析

通过证明级数 $\{\sum x_n - x_{n-1}\}$ 收敛，证明 $\{x_n\}$ 收敛，进而求出极限值

答案：$e^{-\frac{1}{2}}(b-a)+a$

31. 证明压缩映射原理

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，存在 $0 < a < 1$，使得对任何 x, y 都有

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$$

. 证明存在唯一的 x_0 使得 $x_0 = f(x_0)$（x_0 称为不动点）;

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且 $|f'(x)| \leq \alpha$，其中常数 $\alpha < 1$. 任取 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$，有 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并且不依赖于初始值 x_1.

解析

通过证明级数 $\{\sum x_n - x_{n-1}\}$ 收敛，证明 $\{x_n\}$ 收敛

32. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 有几条渐近线?

解析

三条

$x = 0, y = 0, y = x$

33. 求曲线 $y = (x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的渐近线.

解析

$y = e^{\pi}x - 2e^{\pi}, y = x - 2$