大学生数学竞赛教程 by 蒲和平-习题解析

姚光明

2023 年 1 月 15 日

1 第一章 1.1

1. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x,x\leq 0\\ x+2,x>0\end{cases}$ ，$f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\ -x,x\geq 0\end{cases}$ ，求 $g(f(x))$.

解析

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x),f(x)\leq 0\\ 2+f(x),f(x)>0\end{cases}$$ ，而 $$\begin{cases}f(x)=-x\leq 0,x\geq 0\\ f(x)=x^2>0,x<0\end{cases}$$ ，综上合并可得

$$g(f(x))=\begin{cases}2+x,x\geq 0\\ 2+x^2,x<0\end{cases}$$

2. 已知 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1}$, 求 $f(x)$ 的表达式

解析

将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 可以得到两个等式，

$$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1} \tag{1}$$
$$2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x+x^2} \tag{2}$$

$2(1)-x^2(2)$，两式相消，化简整理可有

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n[(1+\frac{x}{n})^n-e^x]$，求 $f(x)$ 的显式表达式

解析

令 $n=\dfrac{1}{t}$，

$$\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{n\to\infty} n[(1+\frac{x}{n})^n-e^x]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(1+xt)^{\frac{1}{t}}-e^x}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(e^{\frac{ln(1+xt)}{t}}-e^x)}{t}\\
&=e^x\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{ln(1+xt)}{t}-x}-1}{t}\\
&=e^x\lim_{t\to 0}\frac{\frac{ln(1+xt)}{t}-x}{t}\\
&=e^x\lim_{t\to 0}\frac{ln(1+xt)-xt}{t^2}\\
&=e^x\lim_{t\to 0}\frac{\frac{x}{1+xt}-x}{2t}\\
&=-\frac{x^2}{2}e^x
\end{aligned}$$

4. 设函数 $F(x)$ 是奇函数，$f(x)=F(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$，其中 $a>0,a\neq 1$，证明：$f(x)$ 是偶函数

解析

$$\begin{aligned}
f(-x)&=F(-x)(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2})\\
&=-F(x)(\frac{-a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2})\\
&=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})\\
&=f(x)
\end{aligned}$$

5. 设对于一切实数 x，有 $f(\dfrac{1}{2}+x)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明 $f(x)$ 是周期函数

解析

由题意可得：

$$(f(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2})^2=f(x)-f^2(x)$$

于是有

$$\begin{aligned}(f(x+1)-\frac{1}{2})^2&=f(x+\frac{1}{2})-f^2(x+\frac{1}{2})\\&=-(f(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\\&=-(f(x)-f^2(x))+\frac{1}{4}\\&=(f(x)-\frac{1}{2})^2\end{aligned}$$

因为 $f(x)>\frac{1}{2}$，所以有

$$f(x+1)=f(x)$$

6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足等式 $f(3-x)=f(3+x)$，$f(8-x)=f(8+x)$，且 $f(0)=0$，试问：方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,2014]$ 上至少有多少个根

解析

由题意可得 $f(x)=f(6-x)=f(x+10), f(0)=f(6)=0$，$f(x)$ 以 10 为周期，在 $[0,10)$ 内有两个零点，而 $[0,2014]$ 有 201 个完整的周期，再加上 $f(2010)=0$，所以一共有 $201\times2+1=403$

7. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x+T)=kf(x)$（其中 T 和 k 是正常数），证明 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 $a>0$ $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数

解析

将 $f(x)$ 反带入表达式中可以解得 $k=a^T$，证毕

8. 若对任意 x,y，有 $f(x)-f(y)\le(x-y)^2$，求证对任意正整数 n，任意 a b，有

$$|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{n}(b-a)^2$$

解析

将 $[a,b]$ 区间分成 n 等份，有

$$\begin{aligned} f(a)-f(a+\frac{b-a}{n}) &\leq \frac{(a-b)^2}{n^2} \\ f(a+\frac{b-a}{n})-f(a+2\times\frac{b-a}{n}) &\leq \frac{(a-b)^2}{n^2} \\ &\ldots\ldots \\ f(a+(n-1)\times\frac{b-a}{n})-f(b) &\leq \frac{(a-b)^2}{n^2} \end{aligned} \tag{3}$$

上述不等式两边相加，可有

$$f(a)-f(b) \leq \frac{(a-b)^2}{n}$$